Fonctions L de paires pour les groupes classiques

Colette Moeglin

Fonctions L de paires pour les groupes classiques

C. Mœglin
Institut de Mathématiques de Jussieu
CNRS, 4 place Jussieu, F-75005 Paris

Résumé

Il y a au moins deux façons naturelles d'associer des fonctions L de paires à un couple formé d'une représentation cuspidales d'un groupe linéaire et d'une représentation automorphe de carré intégrable (irréductible) d'un groupe classique. Les deux définitions s'appuient sur les travaux très récents d'Arthur. La première façon est d'utiliser le produit sur toutes les places des facteurs L de paires définis avec les paramètres de Langlands. La deuxième façon de faire, consiste à utiliser le transfert endoscopique tordu au groupe linéaire convenable et d'utiliser les fonctions L de paires des groupes linéaires.

Dans cet article on compare ces deux types de fonctions L. On montre que celles définies avec les paramètres de Langlands ont moins de pôles celles définies par transfert endoscopique. On montre aussi que l'existence de pôles pour les fonctions L obtenues avec les paramètres de Langlands donnent des conditions suffisantes pour l'existence de pôles à certaines séries d'Eisenstein alors que dans la même situation l'existence de pôles pour les fonctions L définies par transfert endoscopiques sont, elles, des conditions nécessaires pour l'existence de pôles à ces séries d'Eisenstein.

Table des matières

1 Notations

On fixe k un corps de nombres et G un groupe classique auquel s'applique les travaux d'Arthur, c'est-à-dire un groupe special orthogonal ou symplectique. On note m_G^* la dimension de la représentation naturelle du L-groupe de G.

Soit d un entier et ρ une représentation cuspidale irréductible de GL(d) ; en général on fixera plutôt d'abord ρ et on notera d par d_ρ ce qui définit d_ρ. On écrit $|\,|$ pour $|det_{\mathrm{GL}(\mathrm{d}_\rho,\mathbb{A})}|$ où l'on considère la valeur absolue adélique du déterminant. Soit b un entier, on définit $\mathrm{Speh}(\rho,b)$ la représentation de $\mathrm{GL}(\mathrm{ad}_\rho)$ qui se réalise dans l'espace des résidus des séries d'Eisenstein :

$$\left(\prod_{i\in[1,a-1]}(s_i-s_{i+1}-1)E(\rho|\,|^{s_1}\times\cdots\times\rho|\,|^{s_a},f)\right)_{s_1=(a-1)/2,\cdots,s_a=-(a-1)/2},$$

où f parcourt l'ensemble des sections du fibré localement constant des induites $\rho|\,|^{s_1}\times\cdots\times\rho|\,|^{s_a}$ où $s_1,\cdots,s_a\in\mathbb{C}^a$. Cette définition a une variante locale, où pour toute place v de k, $\mathrm{Speh}(\rho_v,b)$ est la composante locale de la représentation précédente en la place v ; on peut en donner une définition purement locale comme l'unique quotient irréductible de l'induite $\rho_v|\,|^{(a-1)/2}\times\cdots\times\rho_v|\,|^{-(a-1)/2}$.

Pour π une représentation de carré intégrable de G et pour $s\in\mathbb{C}$, on considérera aussi les séries d'Eisenstein $E(\rho\times\pi,s)$; elles sont relatives à un groupe de même type que G mais si on écrit $G=Aut(V)$ où V est un espace symplectique ou orthogonal, le groupe en question est le groupe des automorphismes de V auquel on a ajouté d_ρ plans hyperboliques.

2 Introduction

Soit π une représentation automorphe de carré intégrable irréductible de G ; grâce aux travaux annoncés d'Arthur [2], on sait associer à π une représentation de $\mathrm{GL}(\mathrm{m}_{\mathrm{G}}^{*}, \mathbb{A})$, notée π^{GL} avec la propriété que pour toute place v où toutes les données sont non ramifiées, les composantes locales π_v et π_v^{GL} se correspondent par la fonctorialité de Langlands associée à l'inclusion naturelle du L-groupe de G dans $\mathrm{GL}(m_G^*, \mathbb{C})$.

Soit ρ une représentation cuspidale unitaire d'un groupe $\mathrm{GL}(d_\rho)$; depuis ([7]) on sait définir la fonction $L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)$.

Avec les résultats locaux d'Arthur [2], [3], dans le cas des places finies, on connaît aussi la classification de Langlands des représentations tempérées à l'aide de l'endoscopie tordue. On peut donc aussi associé à toute représentation irréductibles en la place v son paramètre de Langlands et en déduire un facteur L local, $L(\rho_v \times \pi_v, s)$. Aux places archimédiennes, cela est aussi faisable depuis longtemps. Pour presque toute place v, le facteur $L(\rho_v \times \pi_v, s)$ coïncide avec le facteur $L(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s)$. On peut donc définir en tant que fonction méromorphe de s :

$$L(\rho \times \pi, s) := \prod_v L(\rho_v \times \pi_v, s)$$

ce qui vaut $L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s) \prod_{v \in S} L(\rho_v \times \pi_v, s)/L(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s)^{-1}$, où S est un ensemble fini de places suffisamment grand pour contenir les places archimédiennes et toutes les places où il y a de la ramification.

Evidemment en général, $L(\rho \times \pi, s) \neq L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)$ et la fonction L de Langlands contient des informations un peu différentes de la fonction obtenue par l'endoscopie tordue car elle voit les mauvaises places. En particulier, elle a en général beaucoup moins de pôles. Le but de cet article est de rendre précise une telle affirmation.

Il y a une difficulté à comprendre les paquets d'Arthur aux places archimédiennes, même le cas des représentations tempérées n'est pas complètement éclairci (cf. [11] qui s'appuie sur [22]). Dans tout ce qui suit mais uniquement pour les résultats globaux on suppose que la représentation π a de la cohomologie à l'infini et on suppose qu'il existe un nombre réel strictement positif s_1 tel qu'en toute place v archimédienne, l'induite $\rho_v| \, |_v^{s_1} \times \pi_v$ a un caractère infinitésimal entier et régulier. On montre alors pour tout nombre réel $s_0 \geq s_1$:

$$\mathrm{ord}_{\mathrm{s=s_0}} \mathrm{L}(\rho \times \pi, \mathrm{s}) \geq \mathrm{ord}_{\mathrm{s=s_0}} \mathrm{L}(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, \mathrm{s}),$$

$$\mathrm{ord}_{\mathrm{s=s_0}} \big(\mathrm{L}(\rho \times \pi, \mathrm{s})/\mathrm{L}(\rho \times \pi, \mathrm{s}+1)\big) \geq$$
$$\mathrm{ord}_{\mathrm{s=s_0}} \big(\mathrm{L}(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, \mathrm{s})/\mathrm{L}(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, \mathrm{s}+1)\big).$$

On commence par démontrer l'analogue de ces résultats d'un point de vue local. Et on montre même qu'avoir une égalité plutôt qu'une inégalité est équivalente à une description simple de l'image d'opérateurs d'entrelacement (cf. 4.1).

La partie la moins prévisible de cet article est que l'existence d'un pôle à la fonction $L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$ en $s = s_0 \geq s_1$ est une condition suffisante pour que les séries d'Eisenstein $E(\rho \times \pi, s)$ aient un pôle en $s = s_0$, au moins si π est une représentation cuspidale. Le résultat n'était pas, de mon point de vue complètement prévisible, car ce qui est clair (cf. [15]) c'est que l'existence d'un pôle en $s = s_0$ des séries d'Eisenstein précédentes entraîne l'existence d'un pôle pour la fonction $L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)/L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s+1)$ mais il n'y a pas équivalence. Pour transformer la condition suffisante que l'on a trouvée en condition nécessaire et suffisante, il faut définir en toute place v, le sous-quotient de Langlands de l'induite $\rho_v| |^{s_0} \times \pi_v$ et on montre alors l'équivalence (pour s_0 avec les hypothèses précédentes) :

on suppose que π est une représentation cuspidale avec les hypothèses déjà faites aux places archimédiennes et alors la fonction $\frac{L(\rho\times\pi,s)}{L(\rho\times\pi,s+1)}$ a un pôle en $s = s_0$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

les séries d'Eisenstein $E(\rho \times \pi, s)$ ont un pôle en $s = s_0$;

la représentation résiduelle ainsi définie, qui est alors nécessairement irréductible, est produit tensoriel restreint des sous-quotients de Langlands définis ci-dessus.

Quand on spécialise au cas où ρ est un caractère quadratique, G est un groupe spécial orthogonal et en supposant que π est une représentation cuspidale, on montre que l'existence d'un pôle en $s = s_0$ de la fonction $L(\rho\times\pi, s)/L(\rho\times\pi, s+1)$ est une condition suffisante pour que π soit dans l'image de séries theta convenables. Ces résultats sont l'objet des paragraphes 5.1 et 5.2, bien sûr pour les raisons expliquées ci-dessus on a les hypothèses précédentes aux places archimédiennes.

Quand on parle de fonctions L, il est inévitable de se préoccuper de l'équation fonctionnelle ; donc l'article commence par étudier les facteurs γ le but étant de montrer que ce sont les mêmes que l'on utilise, en la place locale v, la composante locale π_v de π ou la composante locale π_v^{GL} de π^{GL}. Quand v est une place finie, on obtient facilement le résultat car on connaît assez bien les paquets d'Arthur locaux. Quand v est une place archimédienne, cela se révèle beaucoup plus difficile et on est obligé de mettre des hypothèses ; on renvoit le lecteur à 3.2 pour ces hypothèses. Quand ces hypothèses sont satisfaites, on obtient alors facilement que $L(\rho \times \pi, s)$ vérifie la même équation fonctionnelle que $L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)$, ici pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Comme expliqué ci-dessus, nos définitions des fonctions L se fait via le transfert endoscopique de [2] et [3] à l'aide des définitions pour les groupes GL. Grâce aux résultats de Shahidi [19], [20] et d'Henniart [5] cela revient, quand on travaille localement, à utiliser les définitions du côté galoisien. Globalement, on se ramène ainsi aux travaux de Jacquet et Shalika sur la définition et l'étude des fonctions L de paires [7].

Quand ρ (ci-dessus) est un caractère les fonctions L et les facteurs ϵ ont été définis, uniquement en termes des représentations par Rallis et Piatetskii-Shapiro en [4], chapitre 1 ; localement les définitions sont données par Lapid et Rallis en [10]. Comme Rallis et Soudry en [18] ont montré les propriétés de stabilité de ces facteurs locaux, les méthodes d'Henniart s'appliquent pour vérifier que les facteurs locaux définis par ces travaux sont les mêmes que ceux utilisés ici, au moins aux places finies, grâce à l'équation fonctionnelle démontrée en 3.1. Aux places archimédiennes, le résultat reste vrai sous les hypothèses de 3.2. Du point de vue global, il reste encore du travail à faire pour avoir vraiment la coïncidence.

Pour finir l'article, on s'intéresse au nombre de pôles des fonctions $L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$ quand s parcourt $\mathbb{R}_{>0}$; pour avoir un résultat satisfaisant, on suppose qu'en toute place archimédienne le groupe est quasi déployé et que la composante locale de π est dans le paquet de Langlands associé au paquet d'Arthur. Avec cette hypothèse, en les places archimédiennes, les deux définitions de facteurs L coïncident et tous les résultats précédents sont donc vrais sans hypothèse suppémentaire. On suppose encore que π est une représentation cuspidale et on écrit π^{GL} comme une induite de représentations de carré intégrable, $\pi^{\mathrm{GL}} \simeq \times_{(\rho',b')\in\mathcal{S}}\mathrm{Speh}(\rho',b')$ (ce qui définit $\mathcal{S}$). Alors on montre que le nombre de pôles cherché est inférieur ou égal au cardinal des couples $(\rho',b') \in \mathcal{S}$ tel que $\rho' \simeq \rho$ et $(\rho',b'+2) \notin \mathcal{S}$. Sans l'hypothèse que π est cuspidal le nombre de pôle de la fonction considéré est inférieur ou égal à deux fois le cardinal des couples $(\rho',b') \in \mathcal{S}$ tel que $\rho' \simeq \rho$ et on s'attend à ce que cette borne puisse être atteinte.

Je remercie Nicolas Bergeron pour avoir attiré mon attention sur la caractérisation de l'image des séries theta et Jean-Loup Waldspurger pour les discussions que nous avons eues.

3 Propriétés des facteurs γ

On fixe π une représentation de carré intégrable de G et on note π^{GL} la représentation automorphe de $\mathrm{GL}(\mathrm{m}_{\mathrm{G}}^*, \mathrm{k})$ qu'Arthur lui associe. On fixe aussi ρ une représentation cuspidale irréductible et unitaire de $\mathrm{GL}(\mathrm{d}_\rho, \mathrm{k})$ (ce qui définit d_ρ)

3.1 Le cas des places finies

On fixe une place finie v de k. On considère π_v comme quotient de Langlands d'une induite :

$$\times_{i\in[1,\ell]}\sigma_i|\,|^{-s_i}\times\pi_{temp}\to\pi_v,$$

où pour tout $i\in[1,\ell]$, σ_i est une série discrète unitaire irréductible, $s_i\in\mathbb{R}_{>0}$, π_{temp} est une représentation tempérée et $s_1\geq\cdots\geq s_\ell$. On note π_{temp}^{GL} la représentation du groupe linéaire convenable qui correspond à π_{temp} par l'endoscopie tordue.

Soit ρ_v la composante locale de ρ et soit $s\in\mathbb{C}$. On sait définir, à la suite de Shahidi ([19]) les facteurs γ dans les groupes linéaire et on pose :

$$\gamma(\rho_v,\pi_v,s):=\times_{i\in[1,\ell]}\gamma(\rho_v\times\sigma_i^*,s+s_i)\gamma(\rho_v\times\sigma_i^*,s-s_i)\times\gamma(\rho_v\times\pi_{temp}^{\mathrm{GL}},s).$$

Evidemment avec des définitions analogues, on définit les facteurs L et les facteurs $\epsilon(\rho_v\times\pi_v,s)$ qui intervient dans l'équation fonctionnelle, ci-dessous.

En utilisant π_v^{GL} au lieu de π_v, on sait aussi définir à la suite de Shahidi $\gamma(\rho_v\times\pi(\psi_v)^{\mathrm{GL}},s)$.

Proposition *On a l'égalité de fonction méromorphe :* $\gamma(\rho_v,\pi_v,s)=\gamma(\rho_v\times\pi(\psi_v)^{\mathrm{GL}},s)$.

C'est un problème purement dans les groupes linéaires.

Les facteurs γ jouissent de très bonnes propriétés résumées dans les dix commandements de [10]. On peut définir $\gamma(\tau_v\times\sigma,s)$, où σ est une induite non nécessairement irréductible et $\gamma(\tau_v\times\sigma,s)=\gamma(\tau_v\times\sigma',s)$ pour tout sous-quotient irréductible σ' de σ. On pose $\sigma=\times_{i\in[1,\ell]}\sigma_i|\,|^{-s_i}\times\pi_{temp}\times\sigma_i^*|\,|^{s_i}$ et avec la multiplicativité des facteurs γ, on a :

$$\gamma(\rho_v,\pi_v,s)=\gamma(\rho_v\times\sigma,s).$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de vérifier que $\pi(\psi_v)^{\mathrm{GL}}$ et σ ont même support cuspidal. Le support cuspidal de σ est ce que l'on a appelé le support cuspidal étendu de π_v en [14] 4.1 et on a montré que que c'est aussi le support cuspidal de $\pi(\psi_v)^{\mathrm{GL}}$ pour tout paquet contenant π en [14] 4.1 et 4.2. Cela termine la preuve.

3.2 Le cas des places archimédiennes

Ici on fixe v une place archimédienne ; si v est complexe, on ne fait aucune hypothèse mais si v est une place réelle, on suppose que π_v a de la cohomologie et que π_v^{GL} paramétrise un paquet d'Adams-Johnson contenant π_v. Et la proposition ci-dessus est aussi exacte :

Proposition *On a l'égalité de fonction méromorphe :* $\gamma(\rho_v, \pi_v, s) = \gamma(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s)$.

On commence par le cas où v est une place réelle. Sans aucunes hypothèses on sait que π_v^{GL} est une induite irréductible de représentations Speh(δ, b), éventuellement tordu par un caractère $|det|^x$ avec x un nombre réel de valeur absolue strictement inférieure à $1/2$ et où δ est soit une série discrète de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ soit un caractère unitaire de $\mathbb{R}^*$. On note Jord$(\pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}})$ l'ensemble des triplets (δ, b, x) qui interviennent ci-dessus.

Dès que l'on suppose que le caractère infinitésimal de π_v est régulier, il y a beaucoup de simplification et on a encore plus de simplification si l'on suppose que π_v a un caractère infinitésimal entier et régulier. Sous cette dernière hypothèse pour tout $(\delta, b, x) \in$ Jord$(\pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}})$, on a nécessairement $x = 0$, δ est autodual et la parité de b est déterminé par δ. Ici on utilise simplement le fait que le caractère infinitésimal est entier ; on réduit donc $Jord(\pi_v^{\mathrm{GL}})$ a un ensemble de couples (δ, b). La régularité du caractère infinitésimal assure que pour δ une série discrète de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ fixée, il existe au plus un entier b tel que $(\delta, b) \in$ Jord$(\pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}})$. De plus excepté pour les groupes orthogonaux pairs, il existe au plus un caractère quadratique η tel qu'il existe un entier b avec $(\eta, b) \in$ Jord$(\pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}})$. Si $G(k_v)$ est un groupe spécial orthogonal pair, alors s'il existe $(\eta, b) \in$ Jord$(\pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}})$ avec η un caractère quadratique nécessairement b est impair et Jord$(\pi^{\mathrm{GL}}, \mathrm{v})$ contient nécessairement exactement deux tel couples l'un est (η, b) avec $b \geq 1$ mais nécessairement impair et l'autre est $(\eta\eta_G, 1)$ avec η_G est le caractère trivial si $G(k_v)$ est une forme intérieur d'un groupe déployé et est le caractère non trivial sinon.

Par définition π_v est un quotient de Langlands d'une représentation induite de la forme $ind \otimes_{i \in [1,\ell]} \delta_i |det|^{x_i} \otimes \tau$, où les δ_i sont soit des séries discrètes de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ soit des caractères unitaires de $\mathbb{R}^*$ est les x_i sont des nombres réels décroissants strictement positifs et τ est une représentation tempérée d'un groupe de même type que $G(k_v)$. On note τ^{GL} la représentation du groupe linéaire convenable qui correspond au L-paquet contenant τ (maintenant on a une bonne référence avec les travaux de [11]). Et l'égalité des facteurs γ que l'on cherche résultera de la propriété suivante : la représentation π_v^{GL} et le quotient de Langlands de l'induite $ind \otimes_{i \in [1,\ell]} \delta_i |det|^{x_i} \otimes \tau^{\mathrm{GL}} \otimes_{i \in [\ell,1]} \delta_i |det|^{-x_i}$ sont sous-quotient d'une même série principale.

L'idée sous-jacente, quand π_v a de la cohomologie, est qu'à la représentation E qui est le système de coefficients dans lequel π_v a de la cohomologie, on associe une représentation irréductible de $GL(m_G^*, \mathbb{R})$, E^{GL} et la série principale que l'on cherche est une série principale ayant E^{GL} comme quotient de Langlands. Faute de références et de compétences, on fait un peu différemment et de façon plus terre à terre de plus on utilise ci-dessous l'hypothèse forte que π_v^{GL} paramétrise un paquet d'Adams-Johnson (cf. [1]) contenant π_v.

En effet cette hypothèse permet de relier les δ_i, x_i qui interviennent ci-dessus à $\mathrm{Jord}(\pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}})$; le résultat est le suivant pour tout $(\delta, b) \in Jord(\pi_v^{\mathrm{GL}})$ il existe $b' \leq b$ un entier de même parité que b, éventuellement $b' = 0$ si b est pair tel que l'ensemble des (δ_i, x_i) pour $i \in [1, \ell]$ comme ci-dessus soit à l'ordre près exactement l'ensemble des

$$\cup_{(\delta,b)\in \mathrm{Jord}(\pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}})} \cup_{x\in[(b-1)/2,(b'+1)/2} (\delta, x),$$

où si $b' = b$, l'ensemble attaché à (δ, b) est vide. De plus τ est dans le paquet d'Adams-Johnson associé à la représentation induite des $\mathrm{Speh}(\delta, b')$ pour (δ, b) parcourant $\mathrm{Jord}(\pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}})$ (ces assertions résultent des descriptions explicites des représentations dans un paquet d'Adams-Johnson (cf. [1] &3) ainsi que de la description explicite des paramètres de Langlands des représentations ayant de la cohomologie donnée dans [23] 6.16.

Pour simplifier un peu les notations, on commence par remarquer pour avoir l'assertion pour π_v, il suffit maintenant de l'avoir pour τ. Cela permet de supposer dès le départ que π_v est tempérée et on note π_{temp}^{GL} la représentation tempérée de $GL(m_G^*, \mathbb{R})$ qui paramétrise le paquet de représentations tempérées contenant π_v ([11]). Ainsi π_v est à la fois dans le paquet déterminé par π_v^{GL} et dans le paquet déterminé par π_{temp}^{GL}. Le point est de démontrer que π_{temp}^{GL} et π_v^{GL} sont des sous-quotients d'une même série principale.

On commence par se ramener au cas où τ est une série discrète. S'il n'en est pas ainsi, G est un groupe orthgonal pair et en la place v il est forme intérieure de la forme déployée. Et $\tau = \pi_v$ est un sous-module irréductible d'une induite à partir d'un caractère quadratique η' de $\mathbb{R}^*$ avec une série discrète τ'. On vérifie sur la définition de π_v que nécessairement η' est le caractère η intervenant dans la définition de π_v^{GL} et que $Jord(\pi_v)$ contient deux copies de $(\eta, 1)$; en remplaçant τ par τ' on supprime ces 2 copies. On suppose donc que π_v est une série discrète.

On note π_{temp}^{GL} le paramètre de Langlands de l'unique paquet de représentations tempérées (ici des séries discrètes) contenant π_v. On procède comme on l'a fait pour écrire π_v^{GL} et on trouve que π_{temp}^{GL} est une induite de série discrète de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ si G est un groupe symplectique, orthogonal impair ou orthogonal pair mais forme intérieure de la forme déployée. Dans le cas restant il s'ajoute la représentation de $GL(2, \mathbb{R})$ induite du caractère du tore déployé produit du caractère trivial et du caractère signe. Dans tous les cas π_{temp}^{GL} est sous-quotient d'une série principale induite à partir du tore diagonal et d'un essentiellement produit de valeur absolue à une puissance uniquement déterminée par le caractère infinitésimal (le essentiellement veut dire que ceci est vrai sauf dans le cas où $G(k_v)$ est un groupe orthogonal pair dans la classe du groupe quasi-déployé non déployé ou l'un des caractères est le signe). La même assertion est vrai pour π_v^{GL} si $\eta = 1$. Cela règle donc le cas des groupes symplectiques. Dans le cas des groupes orthogonaux, on se ramène à ce cas en tensorisant π_v par η composé avec la norme spinorielle et en tensorisant ρ_v par le caractère signe du déterminant. Ainsi on n'a pas changé les facteurs γ qui nous intéressent et on n'a pas changé π_{temp}^{GL} qui est invariant par cette tensorisation ; évidemment qu'il n'est pas utile de faire cette tensorisation mais il aurait fallu écrire un peu différemment la série principale choisie. Cela termine la preuve pour le cas des places réelles.

On suppose maintenant que v est une place complexe ; ici il n'y a aucun problème et pas d'hypothèse à faire. On écrit d'abord la représentation de $GL(m^*, \mathbb{C})$ déterminée par le paquet d'Arthur ; c'est nécessairement une induite de caractère preque unitaire (c'est-à-dire de partie réelle comprise strictement entre $-1/2$ et $1/2$). Ainsi le facteur γ associé est aussi le facteur γ associé à une série principale de $G(k_v) = G(\mathbb{C})$ induite à partir d'un caractère d'un sous-groupe de Borel uniquement déterminé par le caractère infinitésimal de π_v. Comme le facteur γ associé à π_v via ses paramètres de Langlands a évidemment la même propriété, on obtient l'égalité des facteurs γ cherchée.

3.3 Application à l'équation fonctionnelle

Cette section n'a évidemment rien d'original. On fixe π et ρ comme dans l'introduction. A toute place v de k qui est réelle, on suppose que π_v a de la cohomologie dans un bon système de coefficients et que le paquet d'Arthur déterminé en cette place par π coïncide avec un des paquets d'Adams-Johnson contenant π_v.

On rappelle l'équation fonctionnelle dans les groupes linéaire : soit ρ, ρ' des représentations cuspidales d'un groupe linéaire et $s \in \mathbb{C}$ alors il existe une fonction holomorphe inversible $\epsilon(\rho \times \rho', s)$ tel que l'on ait l'égalité :

$$L(\rho \times \rho', s) = \epsilon(\rho \times \rho', s) L(\rho^* \times \rho'^*, 1 - s).$$

On a par définition

$$L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s) = \times_{(\rho', b') \in \mathrm{Jord}(\pi)} \times_{k \in [(b'-1)/2, -(b'-1)/2])} L(\rho \times \rho', s + k).$$

Le point ici est que pour tout (ρ', b'), ρ' est autoduale et le segment $[(b'-1)/2, -(b'-1)/2]$ est centré en 0 (pour ce qui suit il suffit que π^{GL} soit autoduale) et il existe donc une fonction holomorphe inversible de s tel que l'on ait l'égalité

$$L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s) = \epsilon(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s) L(\rho^* \times \pi^{\mathrm{GL}}, 1 - s).$$

Proposition *Avec les hypothèses faites au début de ce paragraphe, on a l'égalité de fonctions méromorphes :*

$$L(\rho \times \pi, s) = \epsilon(\rho \times \pi, s) L(\rho^* \times \pi, 1-s).$$

En effet d'après l'égalité des facteurs γ locaux montrés, on a :

$$\epsilon(\rho \times \pi, s) L(\rho^* \times \pi, 1-s)/L(\rho \times \pi, s) =$$

$$\epsilon(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}) L(\rho^* \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)/L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s) = 1.$$

4 Pôles des facteurs et des fonctions L

4.1 Pôles des facteurs L locaux aux places finies

On fixe π et ρ comme précédemment et une place v de k ; on suppose que v est une place finie. On a défini $L(\rho_v \times \pi_v, s)$ et $L(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s)$. On commence par étudier la fonction

$$\phi_v(\rho_v, \pi_v, s) := \frac{L_v(\rho_v \times \pi_v, s)/L_v(\rho_v \times \pi_v, s+1)}{L_v(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s)/L_v(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s+1)}.$$

Cette fonction est liée à l'opérateur d'entrelacement standard, entre les induites :

$$M_v(\rho_v, \pi_v, s) : \rho_v|\,|^s \times \pi_v \to \rho_v^*|\,|^{-s} \times \pi_v.$$

On va l'étudier pour $s = s_0$ réel et supérieur ou égal à 1/2. Le fait de considérer s réel est une simplification d'écriture puisque l'on peut tordre ρ_v par un caractère unitaire. Par contre le fait que $s \geq 1/2$ est une restriction dûe au fait que l'on ne connaît pas la conjecture de Ramanujan ; c'est une vraie restriction mais qui disparaît pour les résultats globaux que l'on a en vue.

On pose

$$N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s) := \big(L(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s)/L(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s+1)\big)^{-1} M_v(\rho_v, \pi_v, s).$$

C'est un opérateur d'entrelacement et on a montré en [16] 3.2 et [17] 5.2 que cet opérateur est holomorphe en $s = s_0 \in \mathbb{R}_{\geq 1/2}$.

On pose aussi

$$N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s) := \big(L(\rho_v \times \pi_v)/L(\rho_v \times \pi_v, s+1)\big)^{-1} M_v(\rho_v, \pi_v, s).$$

Cet opérateur est l'opérateur normalisé à la Langlands-Shahidi, il a de moins bonnes propriétés d'holomorphie que l'opérateur précédent mais, en un point où il est holomorphe, il est plus facile d'avoir une description de son image.

Pour cela on fixe $s_0 \in \mathbb{R}_{\geq 1/2}$ et on définit le sous-quotient de Langlands de l'induite $\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v$: ρ_v est une induite irréductible de représentations de Steinberg éventuellement tordu par un caractère non unitaire mais dont l'exposant est strictement inclus dans $]-1/2, 1/2[$. On note $\tau_{-k}, \cdots \tau_{-1}$ ces représentations ordonnées de telle sorte que l'exposant aille en décroissant. D'autre part on écrit π_v comme quotient de Langlands, ainsi il existe des représentations de Steinberg $\tau_1, \cdots, \tau_\ell$ tordu par des exposants non unitaires mais strictement positifs rangées dans l'ordre décroissant des exposants et une représentation tempérée, π_{temp}. d'un groupe de même type que $G(k_v)$ tel que π_v soit l'unique quotient irréductible de l'induite du produit tensoriel des $(\tau_i)_{i \in [1,\ell]}$ avec τ. On note σ une permutation de l'ensemble $[-k, \ell] - \{0\}$ croissante sur $[-k, -1]$ et sur $[1, \ell]$ qui réarrange la collection de représentations $\tau_{-k}|\,|^{s_0}, \cdots, \tau_{-1}|\,|^{s_0}, \tau_1, \cdots, \tau_\ell$ de façon à ce que les exposants soient dans l'ordre décroissant. Evidemment σ dépend de s_0 et n'est pas uniquement déterminée. Cela permet de construire une induite en ayant réordonné ces représentations et en induisant avec la représentation tempérée π_{temp} et cette induite a un unique quotient irréductible c'est ce que l'on appelle le sous-quotient de Langlands de $\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v$. Pour la suite on appelle $\tau(s)$ la représentation du groupe GL convenable induites $\times_{j \in [-k,-1] \cup [1,\ell]} \tau_{\sigma^{-1}(j)}$.

Dans la proposition ci-dessous on appelle ordre d'un opérateur méromorphe dépendant de la variable s en $s = s_0$ le plus entier x tel que multiplié par $(s - s_0)^{-x}$ il soit holomorphe en $s = s_0$ et non identiquement nul en ce point.

Proposition *Soit $s_0 \in \mathbb{R}_{\geq 1/2}$, alors :*

(i)$ord_{s=s_0} \phi(\rho_v, \pi_v, s) \geq ord_{s=s_0} N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s) \geq 0$.

(ii) $ord_{s=s_0} \phi(\rho_v, \pi_v, s) = 0$ si et seulement si $N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s_0) \not\equiv 0$ et a pour image le sous-quotient de Langlands de l'induite $\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v$.

On montre d'abord que l'ordre de l'opérateur en $s = s_0$, $N^L(\rho_v, \pi_v, s)$ est négatif ou nul et que si cet ordre est zéro, c'est-à-dire que l'opérateur est holomorphe, alors son image en $s = s_0$ contient, comme sous-quotient, le sous-quotient de Langlands de l'induite $\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v$. On considère le diagramme d'opérateur d'entrelacement standard (et d'inclusions évidentes) :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \tau(s)\times\pi_{temp} \\
 & & \downarrow \\
\rho_v|\,|^s\times\pi_v & \underset{\iota}{\hookrightarrow} & \times_{j\in[-k,-1]}\tau_j|\,|^s\times_{i\in[1,\ell]}\tau_i^* \\
 & & \times\pi_{temp} \\
\downarrow & & \\
\rho_v^{*-s}\times\pi_v & & \downarrow \\
\iota\downarrow & & \\
\times_{j\in[-1,-k]}\tau_j^*|\,|^{-s}\times_{i\in[1,\ell]}\sigma_i^* & \rightarrow & \tau(s)^*\times\pi_{temp} \\
\times\pi_{temp} & &
\end{array}$$

Les deux flèches notées ι sont évidemment semblables, c'est l'inclusion de π_v dans $\times_{\in[1,\ell]}\tau_i^*\times\pi_{temp}$.

Le diagramme n'est commutatif qu'à une fonction méromorphe près et de plus la flèche verticale en bas à droite peut ne pas être holomorphe en $s=s_0$ car on est amené à faire l'échange des deux facteurs de l'induite $\tau_i^*\times\tau_j^*|\,|^{-s}$ chaque fois que $-s_i\geq -x_j-s_0$ où l'on a noté s_i l'exposant de τ_i et x_j celui de τ_j. Or quand on a égalité, l'opérateur a un pôle. Pour éviter cela (et pour avoir la commutativité du diagramme) on normalise toutes les flèches à la Langlands-Shahidi : la flèche verticale en bas à droite est remplacée en multipliant l'opérateur d'entrelacement standard par l'inverse de la fonction méromorphe :

$$\prod_{i\in[1,\ell]}\left(L(\rho_v\times\tau_i,s)/L(\rho_v\times\tau_i,s+1)\right)$$

$$\times\left(L(\rho_v\times(\pi_{temp})^{\mathrm{GL}},s)/L(\rho_v\times(\pi_{temp})^{\mathrm{GL}},s+1)\right)$$

$$\prod_{i\in[1,\ell],j\in[-k,-1];\sigma(j)<\sigma(i)} L(\tau_i^*\times\tau_j^*,s)/L(\tau_i^*\times\tau_j^*,s+1).$$

Dans ces conditions, le composé des flèches verticales à droite est holomorphe en $s=s_0$ et a pour image exactement le sous-quotient de Langlands de l'induite $\tau(s)\times\pi_{temp}$.

On normalise aussi la première flèche verticale en remplaçant l'opérateur d'entrelacement standard par l'opérateur $N^L(\rho_v,\pi_v,s)$ et la dernière flèche horizontale (qui est purement dans un groupe linéaire) à la Langlands-Shahidi ; cette flèche est alors noté $N(\sigma,s)$ et c'est un opérateur holomorphe en $s=s_0$.

Avec ces normalisations, le diagramme est commutatif à une fonction holomorphe inversible près en $s=s_0$, fonction qui vient des facteurs ϵ que l'on a négligés et des facteurs de normalisation à la Langlands-Shahidi de la flèche tout en haut à droite que l'on a négligé car ils sont holomorphes inversibles (ceux de la flèche tout en haut à droite).

On remarque encore que cette flèche tout en haut à droite a son image qui est certainement incluse dans $\rho_v|\,|^s \times \pi_v$. Ainsi $N(\sigma, s) \circ \iota \circ N^L(\rho_v, \pi_v, s)$ est holomorphe en $s = s_0$ et calculé en ce point a son image qui contient le sous-module de Langlands de $\tau(s_0) \times \pi_{temp}$. Si $N^L(\rho_v, \pi_v, s)$ est holomorphe en $s = s_0$, l'holomorphie de $N(\sigma, s)$ en $s = s_0$ force l'opérateur $N^L(\rho_v, \pi_v, s_0)$ d'avoir une image non nulle et contenant comme sous-quotient le sous-quotient de Langlands de l'induite $\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v$.

On démontre maintenant (i) : par définition, on a l'égalité d'opérateurs méromorphes

$$\phi(\rho_v, \pi_v, s)^{-1} N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s) = N^L(\rho_v, \pi_v, s).$$

Et en prenant les ordres en $s = s_0$:

$$-ord_{s=s_0}\phi(\rho_v, \pi_v, s) + ord_{s=s_0} N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s) =$$

$$ord_{s=s_0} N^L(\rho_v, \pi_v, s) \leq 0.$$

D'où (i) puisque l'holomorphie de $N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s)$ en $s = s_0$ a été montrée en [16] 3.2 et [17] 5.2.

Montrons (ii) ; on suppose d'abord que $\phi(\rho_v, \pi_v, s_0) \neq 0$. D'après (i), cela force l'opérateur $N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s_0)$ a être non nul. On sait alors avec [17] 5.3.1 que l'image de cet opérateur est une représentation irréductible. Comme par définition :

$$N^L(\rho_v, \pi_v, s) = \phi(\rho_v, \pi_v, s) N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s),$$

cet opérateur est lui aussi holomorphe en $s = s_0$ et son image en $s = s_0$ contient, d'après ce que l'on a montré, le sous-quotient de Langlands de l'induite $\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v$. Par irréductibilité, ce sous-quotient est l'image de $N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s_0)$ comme annoncé dans la proposition.

Réciproquement, supposons que $N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s_0)$ est d'image non nulle égale au sous-quotient de Langlands de l'induite $\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v$, que l'on note ici π_0. Or l'opérateur $N(\sigma, s_0)$ est non nul donc son image contient π_0 qui est l'unique sous-module irréductible de $\tau(s_0)^* \times \pi_{temp}$. Mais π_0 intervient avec multiplicité au plus un dans toutes les induites écrites et ainsi $N(\sigma, s_0)$ ne peut être nul sur π_0 qui est l'image de $N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s_0)$ par hypothèse. De l'égalité $0 \neq$

$$N(\sigma, s_0) \circ N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s_0) = \phi(\rho_v, \pi_v, s_0) \big(N(\sigma, s) \circ N^{\mathrm{GL}}(\rho_v, \pi_v, s)\big)_{s=s_0},$$

on obtient que $\phi(\rho_v, \pi_v, s_0) \neq 0$. Ce qui termine la preuve.

Corollaire *Pour tout $s_0 \in \mathbb{C}$, la fonction $L(\rho_v \times \pi_v, s)/L(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s)$ est holomorphe en $s = s_0$.*

On montre d'abord le corrolaire en tout point $s_0 \in \mathbb{R}_{\geq 1/2}$. Fixons $a \in \mathbb{N}$ un entier très grand. Sur les définitions, on vérifie que ni $L_v(\rho_v \times \pi_v, s+a)$ ni $L_v(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s+a)$ n'ont de pôles en $s = s_0$ (et il n'y a jamais de zéros). On reprend la notation $\phi(\rho_v, \pi_v, s)$ déjà introduite. On a évidemment pour tout $a \in \mathbb{N}$:

$$L(\rho_v, \pi_v, s)/L(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s) = L(\rho_v, \pi_v, s+a)/L(\rho_v, \pi_v^{\mathrm{GL}}, s+a)$$

$$\prod_{i \in [0,a[} \phi(\rho_v, \pi_v, s+i).$$

Donc l'holomorphie cherchée est bien un corollaire de la proposition précédente. On démontre maitenant l'assertion pour $s_0 \in \mathbb{R}_{<1/2}$. On utilise l'égalité des facteurs γ démontré en 3 :

$$L(\rho_v \times \pi_v, s)/L(\rho_v \times \pi_v^{GL}, s) = \zeta(s) L(\rho_v^* \times \pi_v, 1-s)/L(\rho_v^* \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, 1-s),$$

où $\zeta(s)$ prend en compte les facteurs ϵ et est donc une fonction holomorphe inversible. Le terme de droite est holomorphe en s_0 puisque $1 - s_0 \in \mathbb{R}_{>1/2}$ et le terme de gauche est donc aussi holomorphe en $s = s_0$. Ensuite, on passe de s_0 réel à s_0 complexe en tensorisant ρ_v par un caractère unitaire.

4.2 Pôles des facteurs L, le cas des places archimédiennes

On s'attend bien évidemment à avoir les mêmes résultats aux places archimédiennes que ceux démntrés au paragraphe précédent pour les places finies. Toutefois, dans l'état actuel des connaissances, il nous faut mettre des hypothèses pour obtenir ces résultats. Soit ici v une place archimédienne de k.

On fixe donc π et ρ comme précédemment et on fixe un nombre réel positif s_1 ; d'où la représentation π^{GL} de $\mathrm{GL}(\mathrm{m}_{\mathrm{G}}^*, \mathrm{k}_{\mathrm{v}})$. L'hypothèse forte faite ici est que π_0 a de la cohomologie et le caractère infinitésimal de l'induite $\rho_v|\,|^{s_1} \times \pi_v$ est entier et régulier ; entier veut dire que si l'on identifie le caractère infinitésimal à une collection de demi-entiers, ces demi-entiers sont soient tous entiers soit tous demi-entier non entier.

On fixe s_0 un nombre réel et on suppose que $s_0 \geq s_1$.

Proposition *(i)* $\mathrm{ord}_{\mathrm{s=s_0}}\big(\mathrm{L_v}(\rho_{\mathrm{v}} \times \pi_{\mathrm{v}}, \mathrm{s})/\mathrm{L_v}(\rho_{\mathrm{v}} \times \pi_{\mathrm{v}}, \mathrm{s}+1)\big) \geq$

$$\mathrm{ord}_{\mathrm{s=s_0}}\big(\mathrm{L_v}(\rho_{\mathrm{v}} \times \pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}}, \mathrm{s})/\mathrm{L_v}(\rho_{\mathrm{v}} \times \pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}}, \mathrm{s}+1)\big).$$

(ii) $\mathrm{ord}_{\mathrm{s=s_0}} \mathrm{L_v}(\rho_{\mathrm{v}} \times \pi_{\mathrm{v}}, \mathrm{s}) \geq \mathrm{ord}_{\mathrm{s=s_0}} \mathrm{L_v}(\rho_{\mathrm{v}} \times \pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}}, \mathrm{s})$.

On démontre un résultat beaucoup plus fort qui lui n'a aucune chance d'être vrai sans l'hypothèse sur s_1 :

$$\mathrm{ord}_{\mathrm{s=s_0}}\mathrm{L_v}(\rho_{\mathrm{v}} \times \pi_{\mathrm{v}}, \mathrm{s}) = \mathrm{ord}_{\mathrm{s=s_0}}\mathrm{L_v}(\rho_{\mathrm{v}} \times \pi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{GL}}, \mathrm{s}) = 0.$$

Une fois ce résultat démontré, on déduit que toute les fonctions intervenant dans la proposition sont holomorphes non nulles en $s = s_0$, ce qui montre a fortiori la proposition.

Avant de faire la preuve remarquons que l'hypothèse sur s_0 est un peu plus générale que de supposer que l'induite $\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v$ a un caractère infinitésimal régulier.

On exploite le fait que π_v a de la cohomologie : ainsi on sait que π_v est dans l'un des paquet d'Adams-Johnson. On note π_v^{AJ} la représentation de $\mathrm{GL}(\mathrm{m}_{\mathrm{G}}^*, \mathrm{k_v})$ qui paramétrise le paquet d'Adams-Johnson que l'on fixe arbitrairement. On écrit π_v^{AJ} sous la forme d'une induite de module de Speh,

$$\times_\delta \mathrm{Speh}(\delta, b_\delta) \times \mathrm{Speh}(\eta, b_\eta)$$

où δ parcourt un ensemble (sans multiplicité) de séries discrètes et où η est un caractère quadratique, auxquels s'ajoute encore éventuellement un caractère quadratique η' de $\mathbb{R}^*$ (cf3). Comme dans 3, on écrit π_v comme (sous)-quotient de Langlands d'une induite de la forme

$$\times_\delta \times_{i \in [(b_\delta - 1)/2, b'_\delta + 1]} \delta|\,|^i \times_{j \in [(b_{(\eta-1)/2, (b'_\delta+1)/2]})} \times \pi_{temp},$$

où π_{temp} est une représentation tempérée convenable ; il faudrait réordonner les représentations pour que π_v soit réellement un quotient. Il suffit de montrer que $L_v(\rho_v \times \delta, s - i)$ est holomorphe en $s = s_0$ pour tout δ, i comme ci-dessus et qu'il en est de même pour $L_v(\rho_v \times \eta, s - j)$ avec les notations précédentes. On peut supposer que ρ_v est soit une série discrète soit un caractère unitaire : en général on sait que ρ_v est le produit de telles représentations par des caractères de la forme $|\,|^x$ où $x \in]-1/2, 1/2[$. Pour un tel $x \neq 0$ l'holomorphie cherchée résulte simplement de ce que π_v a un caractère infinitésimal entier. Le cas des caractères unitaires non quadratiques se règle de façon analogue. On suppose donc que $x = 0$ on commence par le cas des séries discrètes : soit δ' une série discrète de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ et on note r' son paramètre et $t' = r'/2$, c'est-à-dire que le caractère infinitésimal de δ' est $t', -t'$. On calcule les facteurs L de paires en utilisant les formules [20] (3.5) et (3.7) qui nécessitent de savoir décomposer le produit tensoriel de deux représentations du groupe de Weil de $\mathbb{R}$; cette décomposition est particulièrement bien écrite dans [8] proposition 1.6. On a donc à considérer des pôles de fonctions de l'une des formes suivantes :

pour δ intervenant ci-dessus, de paramètre noté t et pour $\ell \in [(b_\delta - 1)/2, -(b_\delta - 1)/2]$, $\Gamma(s - \ell + |t' - t|)$;

et pour $\ell' \in [(b_\eta - 1)/2, -(b_\eta - 1)/2]$, $\Gamma(s + t - \ell')$.

Considérons le premier type de fonctions ; elles ont des pôles uniquement si $s - (b_\delta - 1)/2 + |t - t'| \leq 0$ et si ce nombre est entier relatif. Ce qui se développe en :

$$t' + s \leq (b_\delta - 1)/2 + t \text{ et } -t' + s \leq -t + (b_\delta - 1)/2.$$

Mais le caractère infinitésimal de la représentation $\mathrm{Speh}(\delta, b_\delta)$ est la collection de demi-entiers $t + [(b_\delta - 1)/2, -(b_\delta - 1)/2] \cup -t + [(b_\delta - 1)/2, -(b_\delta - 1)/2]$. Par hypothèse le caractère infinitésimal de $\delta'|\,|^{s_1} \times \mathrm{Speh}(\delta, b_\delta)$ est certainement entier et régulier. On a donc soit $t' + s_1 > t + (b_\delta - 1)/2$ soit

$$t - (b_\delta - 1)/2 > t' + s_1 \geq -t' + s_1 > -t + (b_\delta - 1)/2.$$

Puisque $s_0 \geq s_1$, on a soit $t' + s_0 > t + (b_\delta - 1)/2$ soit $-t' + s_0 > -t + (b_\delta - 1)/2$ et dans tous les cas, les conditions pour avoir un pôle ne sont pas satisfaites.

Comme le caractère infinitésimal de $\delta|\,|^{s_1} \times \mathrm{Speh}(\eta, b_\eta)$ et lui aussi entier et régulier, on vérifie encore plus facilement que le deuxième type de fonctions n'ont pas de pôle en $s = s_0$. Si δ' est remplacé par un caractère, on raisonne de la même façon.

Ici on a en fait démontrer, au passage, que la fonction $L(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s)$ n'a pas de pôle en $s = s_0$ puisque π_v^{GL} a une forme de même type que π^{AJ} et a le même caractère infinitésimal ; pour les fonctions $L(\rho_v \times \pi_v, s)$ il faut encore remarquer que par positivité stricte la fonction $L(\rho_v \times \pi_{temp}, s)$ n'a pas de pôle en $s = s_0$ et cela termine la démonstration.

4.3 Opérateurs d'entrelacement aux places archimédiennes

On continue avec les hypothèses du paragraphe précédents : v est une place archimédienne et π_v a de la cohomologie. On suppose qu'il existe un nombre réel $s_1 > 0$ tel que le caractère infinitésimal de l'induite $\rho_v|\,|^{s_1} \times \pi_v$ soit entier et régulier.

Lemme *Pour tout nombre réel $s_0 \geq s_1$ l'induite $\rho_v|\,|^{s_1} \times \pi_v$ a un unique quotient irréductible qui est le sous-quotient de Langlands. L'opérateur d'entrelacement standard qui envoie l'induite $\rho_v|\,|^s \times \pi_v$ dans $\rho_v^*|\,|^{-s} \times \pi_v$ est holomorphe en $s = s_0$ et son image est une représentation irréductible isomorphe au sous-quotient de Langlands de l'induite.*

On écrit π_v comme quotient de Langlands d'une induite $\times_{i \in [1,\ell]} \tau_i \times \pi_{temp}$, où les τ_i sont des séries discrètes ou des caractères unitaires tordus dont les exposants sont positifs strictement et rangés dans l'ordre décroissant. On peut aussi supposer que π_v est une série discrète ou un caractère quadratique car en $s = s_1$, on a supposé que l'induite $\rho_v|\,|^{s_1} \times \pi_v$ a un caractère entier. On fixe s_0 comme dans l'énoncé et le point est que si s_0 est plus petit (au sens large) que l'exposant de τ_i pour $i \in [1, \ell]$ fixé, alors l'induite $\rho_v|\,|^{s_0} \times \tau_i$ d'un groupe linéaire convenable est irréductible ; cela résulte de la comparaison des paramètres de $\rho_v|\,|^{s_0}$ et de τ_i comme on l'a fait dans le paragraphe précédent. Ainsi l'induite $\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v$ est un quotient de l'induite $\rho_v|\,|^{s_0} \times_{i\in[1,\ell]} \tau_i \times \pi_{temp}$ qui est elle-même isomorphe à l'induite réordonnée pour que les exposants soient rangés dans un ordre décroissant. Cela prouve la première partie de l'énoncé.

Il reste à prouver l'holomorphie de l'opérateur d'entrelacement. On vérifie aussi que sous ces mêmes hypothèses, l'opérateur d'entrelacement standard est holomorphe : on le sait si s_0 est strictement plus grand que l'exposant de τ_i. Si les exposants sont égaux, on sait que l'opérateur d'entrelacement normalisé à la Langlands-Shahidi est holomorphe mais comme on a montré que le facteur de normalisation n'a ni zéro ni pôle, on obtient l'assertion.

Remarque *Les propriétés de l'opérateur d'entrelacement standard du lemme précédent se transfèrent immédiatement à l'opérateur d'entrelacement normalisé,* $N^{\mathrm{GL}}(\rho_v \times \pi_v, s)$ *défini comme en 4.1 puisque le facteur de normalisation n'a ni zéro ni pôle.*

4.4 Remarque sur les places archimédiennes

On a démontré l'équation fonctionnelles aux places archimédiennes sous l'hypothèse que π_v^{GL} est le paramètre d'un paquet d'Adams-Johnson contenant π_v.

Remarque *La proposition 4.1 est aussi vraie à la place archimédienne* v *et même plus précisément ici (i) est vrai pour tout* $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$.

Cette remarque est, en fait, complètement triviale : on décrit les paramètres de Langlands de π_v en fonction de π_v^{GL} (au moins partiellement) comme on la fait en 3.2. D'après la définition des facteurs L qui est multiplicative en les paramètres de Langlands, on est directement ramené au cas où π_v est tempéré. On suppose d'abord que $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$. Par positivité, $L_v(\rho_v \times \pi_v, s)$ n'a pas de pôle en $s = s_0$ et n'y est pas nul car il ne peut y avoir de 0. On a donc de façon immédiate le (ii) de 4.1 sous l'hypothèse que $s_0 > 0$; grâce à l'équation fonctionnelle, on obtient comme dans 4.1 l'assertion (ii) pour tout s_0. Pour montrer (i), on calcule avec la description explicite de π_v^{GL} :

$$L(\rho_v \times \pi_v^{GL}, s)/L(\rho_v \times \pi_v^{GL}, s+1) = \prod_{(\delta,b_\delta)} \prod_{k\in[(b_\delta-1)/2,-(b_\delta-1)/2]}$$

$$L(\rho_v \times \delta, s-k)/L(\rho_v \times \sigma, s-k+1),$$

auquel s'ajoute un produit du même type où δ est remplacé par un caractère. Mais un tel produit se simplifie pour donner

$$\prod_{\delta,b_\delta} L(\rho_v \times \delta, s-(b_\delta-1)/2)/L(\rho_v \times \delta, s+(b_\delta+1)/2).$$

Les dénominateurs sont donc d'ordre 0 en $s=s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ et en un tel point l'ordre du quotient de fonctions L est donc inférieur ou égal à 0 ce qui donne (i).

4.5 Pôles des fonctions L

On fixe ρ et π et on reprend les hypothèses des places archimédiennes : on suppose qu'il existe un réel positif s_1 tel qu'en toute place archimédienne v le caractère infinitésimal de l'induite $\rho_v|\,|^{s_1} \times \pi_v$ est entier et régulier.

Théorème *(i) Soit* $s_0 \in \mathbb{R}_{\geq s_1}$. $\mathrm{ord_{s=s_0}L(\rho\times\pi, s)/L(\rho\times\pi, s+1)} \geq$

$$\mathrm{ord_{s=s_0}L(\rho\times\pi^{GL}, s)/L(\rho\times\pi^{GL}, s+1)}.$$

et $\mathrm{ord_{s=s_0}L(\rho\times\pi, s)} \geq \mathrm{ord_{s=s_0}L(\rho\times\pi^{GL}, s)}$.

(ii) On suppose ici qu'en toute place archimédienne, réelle, v, π_v^{GL} paramétrise un paquet d'Adams-Johnson contenant π_v. Alors $L(\rho \times \pi, s)$ et $L(\rho\times\pi^{\mathrm{GL}}, s)$ vérifient la même équation fonctionnelle et pour tout $s_0 \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{ord_{s=s_0}L(\rho\times\pi, s)/L(\rho\times\pi, s{+}1)} \geq \mathrm{ord_{s=s_0}L(\rho\times\pi^{GL}, s)/L(\rho\times\pi^{GL}, s{+}1)}.$$

$$\mathrm{ord_{s=s_0}L(\rho\times\pi, s)} \geq \mathrm{ord_{s=s_0}L(\rho\times\pi^{GL}, s)}.$$

Le (i) de ce théorème est un corollaire des résultats locaux. Ceci est aussi vrai pour le (ii), pour l'équation fonctionnelle et pour la comparaison des ordres si l'on suppose que $s_0 \in \mathbb{R}_{\geq 1/2}$ puisque l'on a cette limitation pour les places finies. Soit donc $s_0 \in \mathbb{R}_{\leq 1/2}$; alors $1-s_0 \in \mathbb{R}_{\geq 1/2}$ et par l'équation fonctionnelle, en posant $s'=1-s$

$$L(\rho^*\times\pi, s)/L(\rho^*\times\pi, s+1) = \epsilon(\rho^*\times\pi, s)L(\rho\times\pi, s')/L(\rho\times\pi, 1+s').$$

L'ordre du membre de gauche en $s=s_0$ est donc égal à celui du membre de droite en $s'=1-s_0$. On a la même égalité en remplaçant π par π^{GL} et cela permet de démontrer (ii) pour tout s_0.

5 Applications aux séries d'Eisenstein

Le but de cette section est de démontrer que l'existence d'un pôle en $s=s_0 \in \mathbb{R}_{>1/2}$ pour la fonction $L(\rho\times\pi, s)/L(\rho\times\pi, s+1)$ entraîne l'existence d'un pôle pour les séries d'Eisenstein $E(\rho \times \pi, s)$ en $s = s_0$. On donne même une condition nécessaire et suffisante. Le cas où $s = 1/2$ et un peu différent, on sait par avance que les pôles des séries d'Eisenstein en $s = 1/2$ dépendent non pas de la fonction précédente (dont on vérifiera qu'elle est holomorphe) mais d'une fonction L liée à la représentation ρ elle-même, la fonction $L(\rho, r_G, s)$ où r_G est la représentation naturelle du groupe dual de G dans $GL(m_G^*, \mathbb{C})$. Et en $s_0 = 1/2$ ce sont les pôles de la fonction $L(\rho, r_G, s)L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$ qui vont intervenir.

Malheureusement il nous faut des hypothèses aux places archimédiennes : on suppose qu'il existe un réel s_1 strictement positif tel qu'en toute place archimédienne v, l'induite $\rho_v|\,|^{s_1} \times \pi_v$ a un caractère infinitésimal entier et régulier.

5.1 Pôles des quotients de fonctions L et résidus de séries d'Eisenstein

On reprend la définiton du sous-quotient de Langlands des induites locales $\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v$, déjà utilisé en 4.1, que l'on note ici $Lang(\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v)$.

Théorème *On fixe un nombre réel $s_0 \in \mathbb{R}_{\geq s_1}$. Et on suppose que π est une représentation cuspidale.*

(i) On suppose ici que $s_0 > 1/2$; alors le pôle de la fonction $L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$ est au plus simple en $s = s_0$. Et on a l'équivalence : $L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$ a un pôle en $s = s_0$ si et seulement si la série d'Eisenstein $E(\rho \times \pi, s)$ a un pôle en $s = s_0$ et son résidu est une représentation nécessairement irréductible isomorphe en toute place v à $Lang(\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v)$.

(ii)On suppose ici que $s_0 = 1/2$; alors la fonction $L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$ est holomorphe en $s = s_0$ et l'on a l'équivalence

$L(\rho, r_G, 2s)L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$ a un pôle en $s = s_0$ si et seulement si

$$\big((s - s_0)E(\rho \times \pi, s)\big)_{s=s_0} \simeq \otimes'_v Lang(\rho_v|\,|^{s_0} \times \pi_v).$$

(i) et (ii) se démontrent simultanément. Puisque l'on a supposé que π est cuspidale, les séries d'Eisenstein considérées n'ont qu'un terme constant non nul qui vaut, pour f_s une section de l'induite $\rho|\,|^s \times \pi$, $f_s + M(s)f_s$, où $M(s)$ est l'opérateur d'entrelacement standard. On remplace $M(s)$ par

$$\frac{L(\rho, r_G, 2s)}{L(\rho, r_G, 2s+1)} \frac{L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)}{L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s+1)} N^{\mathrm{GL}}(\rho \times \pi, s),$$

où $N^{\mathrm{GL}}(s)$ est le produit sur toutes les places v de l'opérateur local $N_v^{\mathrm{GL}}(\rho_v \times \pi_v, s)$ déjà utilisé en 4.1 a un facteur près qui vient des facteurs locaux de $L(\rho, r_G, 2s)/L(\rho, r_G, 2s+1)$. Ces facteurs locaux n'ont ni zéro ni pôle en $s = s_0 \geq 1/2$. On a donc $\mathrm{ord_{s=s_0} M(s)} = \mathrm{ord_{s=s_0} L(\rho, r_G, 2s)/L(\rho, r_G, 2s+1)}$

$$+\, \mathrm{ord_{s=s_0} L(\rho \times \pi^{GL}, s)/L(\rho \times \pi^{GL}, s+1)}$$

$$+ \sum_v \mathrm{ord_{s=s_0} N_v^{GL}(\rho_v \times \pi_v, s)},$$

la somme sur v étant nécessairement finie. Et ceci vaut encore, avec les notations de 4.1

$$\mathrm{ord_{s=s_0} L(\rho, r_G, 2s)/L(\rho, r_G, 2s+1) + ordre_{s=s_0} L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)}$$

$$+ \sum_v \mathrm{ord_{s=s_0}} \phi(\rho_v, \pi_v, \mathrm{s})^{-1} + \mathrm{ordre_{s=s_0} N_v^{GL}(\rho_v \times \pi_v, s)}.$$

Dans la somme sur les places v, on est en droit de se limiter aux places finies d'après 4.2. Le lemme 4.1 montre que chaque terme de cette somme est inférieur ou égal à 0. Et on a donc

$$\mathrm{ord_{s=s_0} M(s) \leq ord_{s=s_0} L(\rho, r_G, 2s)/L(\rho, r_G, 2s+1)}$$

$$\mathrm{+ord_{s=s_0} L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)}.$$

On rappelle que Langlands a démontré que ces séries d'Eisenstein ont des pôles au plus simple [9] et que les pôles de $M(s)$ sont exactement les pôles de ces séries d'Eisenstein. Donc on retrouve déjà que le produit

$$\big(L(\rho, r_G, 2s)/L(\rho, r_G, 2s+1)\big)\big(L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)/L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s+1)\big)$$

a au plus des pôles simples.

De plus, puisque $s_0 \geq 1/2$ les pôles de $L(\rho, r_G, 2s)/L(\rho, r_G, 2s+1)$ sont parmi ceux de $L(\rho \times \rho, 2s)$; il y en a donc au plus un, nécessairement simple, en $s_0 = 1/2$ et $L(\rho, r_G, 2s)/L(\rho, r_G, 2s+1)$ n'a certainement pas de 0 pour $s_0 > 1/2$ puisque cela fournirait un 0 hors de la bande critique (ouverte) à $L(\rho \times \rho, 2s)$. De plus, puisque les pôles de $L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$ fournissent des pôles à $L(\rho \times \pi^{GL}, s)/L(\rho \times \pi^{GL}, s+1)$ et qu'il n'y en a donc pas en $s = 1/2$. Cela montre les propriétés d'holomophie ou d'ordre des pôles annoncées dans l'énoncé concernant cette fonction.

On en vient au cœur de la démonstration : on a une équivalence entre le fait que

$$\big(L(\rho, r_G, 2s)/L(\rho, r_G, 2s+1)\big)\big(L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)/L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s+1)\big)$$

ait un pôle en $s = s_0$ et le fait que d'une part les séries d'Eisenstein $E(\rho \times \pi, s)$ aient un pôle en $s = s_0$ et d'autre part que pour toute place v :

$$\mathrm{ord_{s=s_0}} \phi(\rho_v, \pi_v, \mathrm{s}) = \mathrm{ordre_{s=s_0} N_v^{GL}(\rho_v \times \pi_v, s)} \tag{1}$$

Avec les hypothèses que l'on a mises, si v est une place archimédienne, on sait que (1) est vrai et que l'image de $N^{\mathrm{GL}}(\rho_v \times \pi_v, s_0)$ est le sous-quotient de Langlands. Aux places finies, on remplace (1) par la propriété équivalente, d'après 4.1, que le sous-quotient de Langlands de l'induite $\rho_v| |^{s_0} \times \pi_v$ est exactement l'image de $N_v^{\mathrm{GL}}(\rho_v \times \pi_v, s_0)$. Cela donne exactement les équivalences en (i) et (ii) de l'énoncé du théorème.

5.2 Images par séries theta

Dans cette sous-section, on suppose que G est un groupe spécial orthogonal, $SO(m)$ et on fixe r un entier satisfaisant $2r < m$. On note H le groupe $Sp(2r)$ si m est pair et $Mp(2r)$ si m est impair. On dit que π est dans l'image cuspidale des séries theta à partir de H s'il existe une représentation cuspidale τ de H et un caractère quadratique automorphe η telle que $\pi \otimes \eta$ soit inclus dans la restriction à $SO(m)$ de l'image de τ par série thetas. Comme il y a plusieurs façons de normaliser l'image par séries theta, puisque l'on peut toujours tordre par un caractère automorphe de $SO(m)$, la définition que l'on a prise évite de devoir préciser. Comme cela, on a aussi une indépendance en fonction du caractère additif fixé pour définir les séries theta.

On suppose que pour toute place archimédienne v, π_v a de la cohomologie et qu'il existe un caractère quadratique automorphe η tel que l'induite $\eta_v| |^{m/2-r} \times \pi_v$ est entier régulier. Cette dernière propriété est indépendante du caractère quadratique.

Théorème *On suppose que la fonction $L(\eta \times \pi, s)/L(\eta \times \pi, s+1)$ a un pôle en $s = m/2 - r$ pour un choix de caractère quadratique η ; alors π est dans l'image cuspidale des séries theta à partir de H.*

D'après le théorème de 5.1 dont les hypothèses sont satisfaites, on a en fait nécessairement $m/2 - r \geq 1$ et les séries d'Eisenstein $E(\eta \times \pi, s)$ ont un pôle en $s = m/2 - r$. Il résulte de [13] thm p203 et [6] 5.1 qu'il existe un entier $r' \leq r$ tel que π soit dans l'image cuspidale des séries theta de H' où H' est l'analogue de H en remplaçant r par r'. On note τ' une représentation cuspidale et η' un caractère quadratique tel que $\pi \otimes \eta'$ soit dans l'image du relèvement theta de τ'. En regardans la correspondance theta non ramifié, on voit qu'il existe un caractère η'' quadratique (qui dépend des choix) tel que π^{GL} soit une induite de module de Speh l'un d'entre eux étant nécessairement $\mathrm{Speh}(\eta'', m-1-2r')$ et, uniquement si m est pair, un facteur $\mathrm{Speh}(\eta''', 1)$ où η''' est un caractère quadratique convenable. Puisque $L(\eta \times \pi, s)/L(\eta \times \pi, s+1)$ a un pôle en $s = m/2 - r$ il en est de même de $L(\eta \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)/L(\eta \times \pi^{\mathrm{GL}}, s+1)$ d'après 4.5. Cela force π^{GL} écrit comme induite de module de Speh d'avoir aussi un facteur $\mathrm{Speh}(\eta, m-1-2r)$. Si $r \neq r'$ la régularité du caractère infinitésimal de π aux places archimédiennes n'est sûrement pas satisfaite. Ainsi $r' = r$ et le théorème est démontré.

A l'instar de 5.1 on pourrait donner un énoncé où l'on a une équivalence et non seulement une condition suffisante.

5.3 Exemple

On propose ici un exemple d'un triplet (ρ, π, s_0) où les séries d'Eisensteine $E(\rho\times\pi, s)$ ont un pôle en $s = s_0$ alors que la fonction $L(\rho\times\pi, s)/L(\rho\times\pi, s+1)$ est holomorphe en $s = s_0$. Dans tout ce qui suit $tr_?$ signifie la représentation triviale du groupe en indice.

On fixe ρ' une représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}(6)$; on suppose qu'il existe deux places finies, notée v_i, pour $i = 1, 2$ telles que ρ_{v_i} est l'induite du caractère trivial et de $St(\eta, 5)$, la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}(5, k_{v_i})$ tordue par le caractère quadratique non ramifié non trivial. Il n'y a aucune raison pour qu'une telle représentation n'existe pas mais je n'ai pas non plus l'assurance qu'elle existe car les conditions locales donnent des représentations tempérées et non des séries discrètes. On suppose en plus qu'à l'infini la représentation a de la cohomologie et là on a du choix.

On considère les données globales, $(tr_{\mathrm{GL}(1)}, 1), (\rho', 5)$ où $tr_{\mathrm{GL}(1)}$ est la représentation trivial de $\mathrm{GL}(1)$. Ceci fournit un paquet d'Arthur de représentation de carré intégrables pour $Sp(30, k)$, le groupe symplectique de rang 15.

Le caractère d'Arthur est trivial ; il n'y a que des représentations de type orthogonale.

Pour $i = 1, 2$, il existe une (en fait deux) représentation π_i dans le paquet local d'Arthur qui véfie une inclusion

$$\pi_i \hookrightarrow |\,|^{-2} \times \pi_{i,cusp}, \tag{1}$$

où $\pi_{i,cusp}$ est une représentation cuspidale de $Sp(28, k_{v_i})$: en effet, localament, le paramètre d'Arthur est la somme de 3 représentation irréductibles de $W_{k_{v_i}} \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$:

$$tr_{W_{k_{v_i}}\times SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})} \oplus tr_{W_{k_{v_i}}\times SL(2,\mathbb{C})} \otimes sp_5 \oplus \eta_{W_{k_{v_i}}} \otimes sp_5 \otimes sp_5,$$

où sp_5 est la représentation irréductible de dimension 5 de $SL(2,\mathbb{C})$. On a donné en [12] une description complète des représentations dans ce paquet (cf. la version simplifiée [16] 2.3).

Remarque *Soit π une représentation dans le paquet d'Arthur global défini par les paramètres précédent. On suppose que $\pi_{v_1} \simeq \pi_1$. Alors π est cuspidale.*

En effet si π n'est pas cuspidale, elle vérifie [15] 1.3 et en toute place v, π_v est un quotient de $\rho'_v|\,|^2 \times \pi'[v]$, où π'_v est une représentation convenable. Mais ceci n'est pas vrai en les places v_i (pour $i = 1, 2$) à cause de (1), puisque ρ' n'est pas un caractère.

Lemme *Soit π une représentation dans le paquet d'Arthur global défini précédemment ; on suppose que $\pi_{v_1} \simeq \pi_1$. Le facteur $L_{v_1}(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi, s)/L_{v_1}(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi, s+1)$ a un zéro en $s=1$. Pour $i=1,2$ les facteurs $L_{v_i}(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi_{v_i}^{\mathrm{GL}}, s)/Lv_i(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi_{v_i}^{\mathrm{GL}}, s+1)$ sont holomorphes non nuls en $s=1$.*

La première assertion vient de (1) qui donne la paramétrisation de Langlands de π_1. Elle est évidemment aussi vraie pour $i=2$. Montrons la deuxième ;

$$\frac{L_{v_i}(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi_{v_i}^{\mathrm{GL}}, s)}{Lv_i(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi_{v_i}^{\mathrm{GL}}, s+1)} = \frac{L_{v_i}(s)}{L_{v_i}(s+1)} \frac{L_{v_i}(\rho'_{v_i}, s-2)}{L_{v_i}(\rho'_{v_i}, s+3)}.$$

La non nullité est claire puisque les dénominateurs sont calculés en des réels strictement positifs. On doit donc montrer que pour $i=1,2$, $L_{v_i}(s)L_{v_i}(\rho'_{v_i}, s-2)$ n'a pas de pôle en $s=1$. Ceci est clair pour le premier facteur, le deuxième facteur est encore un produit, $L_{v_i}(s-2)L_{v_i}(St(\eta,5), s-2)$. Comme η est non trivial, aucun des facteurs n'a de pôle en $s=1$.

Remarque *Il existe une représentation cuspidale dans le paquet d'Arthur assoicée aux données précédentes, telle que $\pi_{v_1} \simeq \pi_1$ et pour toute place $v \neq v_1, v_2$, π_v soit dans le paquet de Langlands associée au paquet d'Arthur. Pour une telle représentation π, les séries d'Eisenstein $E(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi, s)$ ont un pôle en $s=1$ et le quotient de fonction L, $L(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi, s)/L(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi, s+1)$ est holomorphe en $s=1$.*

Ce qui se produit est que des facteurs locaux pour le quotient de fonction L ont des zéros alors qu'il n'y en a pas pour l'analogue avec GL en exposant mais l'opérateur d'entrelacement local n'est pas holomorphe quand il est normalisé à la Langlands alors qu'il l'est quand il est normalisé avec les facteurs venant du groupe général linéaire.

L'existence de π vient de la formule de multiplicité d'Arthur et on a gardé une liberté en la place v_2 pour assurer tout problème.

On a alors :

$$\frac{L(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi, s)}{L(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi, s+1)} = \gamma_{v_1}\gamma_{v_2} \frac{L(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)}{L(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi^{\mathrm{GL}}, s+1)},$$

où pour $i=1,2$,

$$\gamma_{v_i} = \frac{L_{v_i}(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi_{v_i}, s)}{L_{v_i}(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi_{v_i}, s+1)} \frac{L_{v_i}(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi_{v_i}^{\mathrm{GL}}, s+1)}{L_{v_i}(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi_{v_i}^{\mathrm{GL}}, s)}.$$

Ces facteurs n'ont pas de pôles pour $s \in \mathbb{R}_{>0}$ par l'argument donné ci-dessus. Pour $i=1,2$, en $s=1$, γ_{v_i} a un zéro d'après les résultats précédents. On sait que $L(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)/L(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi^{\mathrm{GL}}, s+1)$ a un pôle d'ordre exactement 1 en $s=1$ à cause du premier facteur.

Ainsi ce qui précède montre que $L(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi, s)/L(tr_{\mathrm{GL}(1)} \times \pi, s+1)$ est holomorphe en $s = 1$.

Il reste à montrer que les séries d'Eisenstein ont des résidus non nul en $s = 1$. Avec [16], il faut encore vérifier que les opérateurs d'entrelacements locaux normalisés comme en loc.cite sont non nuls. Mais cela résulte des choix : aux places v_i, pour $i = 1, 2$, la non nullité résulte de ce que l'opérateur d'entrelacement standard :

$$| \, |^s \times | \, |^{-2} \times \pi_{v_i,cusp} \to | \, |^{-s} \times | \, |^{-2} \times \pi_{v_i,cusp},$$

est holomorphe et donc nécessairement non nul ; la normalisation avec les fonctions L attachées à π^{GL}, n'introduit ni pôle ni zéro à cette place comme on l'a vu ci-dessus. D'où la non nullité de l'opérateur d'entrelacement normalisé comme en [15]. Pour les autres places, la non nullité vient de [15] 3.5.

6 Nombre de pôles

Dans cette section on suppose qu'en toute place archimédienne le groupe est quasi déployé. On fixe une représentation cuspidale π et on suppose qu'en toute place archimédienne la composante locale π_v est dans le paquet de Langlands à l'intérieur du paquet d'Arthur ; ce qui importe pour nous est qu'alors, par définition, $L(\rho_v \times \pi_v, s) = L(\rho_v \times \pi_v^{\mathrm{GL}}, s)$. Sous cette hypothèse, la proposition de 5.1 est vraie : l'holomorphie et la non nullité des opérateurs d'entrelacement aux places archimédiennes résulte de [15] 3.5.

On écrit $\pi^{\mathrm{GL}} \simeq \times_{(\rho',b') \in \mathcal{S}} \mathrm{Speh}(\rho', b')$, ce qui définit $\mathcal{S}$. On note $\mathcal{S}_\rho$ l'ensemble des entiers b tel que $(\rho, b) \in \mathcal{S}$.

Corollaire *Le nombre de pôles réels positifs de la fonctions $L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$ est inférieur ou égal au cardinal du sous-ensemble de $\mathcal{S}_\rho$ formé des entiers b tel que $b + 2 \notin \mathcal{S}_\rho$.*

Soit $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ un pôle de la fonciton $L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$. D'après 5.1 et ce qui précède l'énoncé, on sait que la série d'Eisenstein $E(\rho \times \pi, s)$ a aussi un pôle en $s = s_0$ et son résidu est de carré intégrable. Notons π_+ ce résidu ; on sait que c'est une représentation irréductible (cf. [17]) mais pour ce que l'on fait ici, il suffit d'en prendre une composante irréductible. On écrit le transfert tordu, π_+^{GL} de π_+ au bon groupe linéaire : nécessairement, $(\rho, 2s_0 - 1) \in \mathcal{S}$ et

$$\pi_+^{\mathrm{GL}} \simeq \mathrm{Speh}(\rho, 2s_0 + 1) \times_{(\rho',b') \in \mathcal{S}; (\rho',b') \neq (\rho, 2s_0 - 1)} \mathrm{Speh}(\rho', b').$$

Donc en particulier $(\rho, 2s_0 + 1) \notin \mathcal{S}$. Cela prouve le corollaire.

Remarque *Si on ne suppose pas que π est cuspidal, alors le nombre de pôles réels positifs de la fonction $L(\rho \times \pi, s)/L(\rho \times \pi, s+1)$ est inférieur ou égal à $2|\mathcal{S}_\rho|$ cette borne pouvant très certainement être atteinte.*

En effet, il se peut tout à fait qu'en toute place v, le groupe soit quasi-déployé et la composante locale de π soit dans le paquet de Langlands à l'intérieur du paquet d'Arthur. Si cette propriété est vérifiée, alors $L(\rho \times \pi, s) = L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)$ et

$$\frac{L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s)}{L(\rho \times \pi^{\mathrm{GL}}, s+1)} = \prod_{(\rho', b') \in \mathcal{S}} \frac{L(\rho \times (\rho')^*, s - (b'-1)/2)}{L(\rho \times (\rho')^*, s + (b'+1)/2)}.$$

On sait calculer les pôles de chaque membre du terme de droite ; évidemment, ces pôles arrivent en des points demi-entiers et on ne peut exclure l'existence de 0. On s'attend quand même qu'il existe une données $\mathcal{S}$ tel que pour $(\rho', b'), (\rho'', b'') \in \mathcal{S}$, $L(\rho' \times (\rho'')^*, 1/2) \neq 0$. Dans ce cas, la borne est de l'énoncé est bien atteinte.

Références

[1] J. Adams and J. Johnson. Endoscopic groups and packets of nontempered representations. *Compositio Math.*, 64(3) :271–309, 1987.

[2] J. Arthur. An introduction to the trace formula. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, volume 4 of *Clay Math. Proc.*, pages 1–263. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[3] J. Arthur *Livre en préparation*

[4] S. Gelbart, I. Piatetskii-Shapiro, S. Rallis Explicit constructions of automorphic L-functions *LNM* 1254, Springer, 1987

[5] G. Henniart Correspondance de Langlands et Fonctions L des carrés Extérieur et Symétrique *IMRN* 2010 (4), 633–673, 2010

[6] D. Ginzburg, D. Jiang, and D. Soudry. Poles of L-functions and theta liftings for orthogonal groups. *J. Inst. Math. Jussieu*, 8(4) :693–741, 2009.

[7] H. Jacquet, I. Piateskii-Shapiro, J. Shalika Rankin-Selberg Convolutions *American Journal of Mathematics* 105 (2), 367–464, 1983

[8] H. Kasten Cohomological representations and twisted Rankin-Selberg convolutions Dissertation http ://www.mathi.uni-heidelberg.de/ kasten, 2007

[9] R. P. Langlands On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series LMN 544, Springer Verlag, 1976

[10] E. Lapid, S. Rallis On the local factors of representations of classical groups *in Automorphic Representations, L-Functions and Applications, Progress and Prospects* Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publi. 11, 309–359, 2005

[11] P. Mezo. Character identities in the twisted endoscopy of real reductive groups. preprint. 2011

[12] C. Mœglin Paquets d'Arthur discrets pour un groupe classique p-adique *Contemporary Mathematics* in Automorphic forms and L-function, II Local Aspects, Volume in honor of S. Gelbart, 489, 179–258, 2009

[13] C. Mœglin. Non nullité de certains relêvements par séries théta. *J. Lie Theory*, 7(2) :201–229, 1997.

[14] C. Mœglin Comparaison des Paramtres de Langlands et des Exposants l'Intrieur d'un Paquet d'Arthur *Journal of Lie Theory* 19 (4), 797–840, 2009

[15] C. Moeglin Formes automorphes de carré intégrable non cuspidales *Manuscripta Math* 127, 411–467, 2008

[16] C. Moeglin Holomorphie des opérateurs d'entrelacement normalisés à l'aide des paramètres d'Arthur *Canadian Journal of Math* 62, 1340–1386, 2010

[17] C. Moeglin Image des opérateurs d'entrelacements normalisés et pôles des séries d'Eisenstein *prépublication* 2009

[18] S. Rallis, D. Soudry Stabilitly of the local gamma factor arising from the doubling method *Math. Ann.* 333, 291–313, 2005

[19] F. Shahidi On certain L -functions *American Journal of Mathematics* 103, 297–355, 1981

[20] F. Shahidi Local coefcients as Artin factor for real groups *Duke Mathematical Journal* 52, 973–1007, 1985

[21] F. Shahidi A proof of Langlands conjecture on Plancherel measures, complementary series for p-adic groups *Ann of Math.* 132, 273–330, 1990

[22] D. Shelstad On spectral transfer factors in real twisted endoscopy *prépublication* http ://andromeda.rutgers.edu/ shelstad, 2010

[23] D. Vogan, G. Zuckerman Unitary representations with non-zero cohomology *Compositio Math.* 53 (1), 51–90, 1984